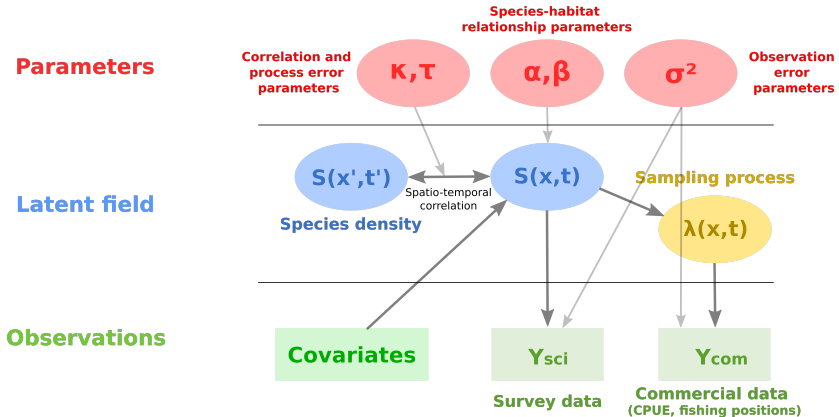


## TD R-INLA - M2 halieutes

Baptiste Alglave based on Thomas Opitz and Denis Allard

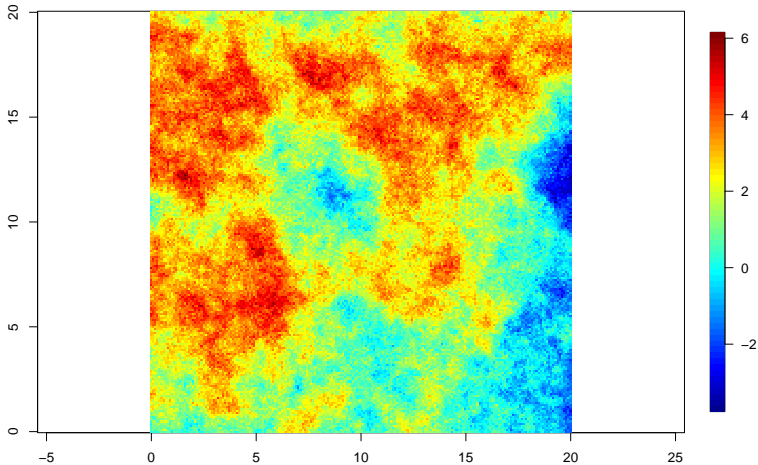
Janvier 2022

# Modèle hiérarchique spatial



Un exemple de modèle hiérarchique

# Champ gaussien



$x|\theta \sim GF(\mu, \Sigma)$       champ gaussien

- $\Sigma = Q^{-1}$ : la matrice de variance-covariance de l'effet aléatoire (suit une certaine fonction de variance-covariance - souvent de type Matérn).  $Q$  est la matrice de précision.

# Formulation mathématique

$$\theta \sim \pi(\theta) \quad \text{hyperparamètres}$$

$$x|\theta \sim GF(0, \Sigma) \quad \text{champ gaussien latent}$$

$$y|x, \theta \sim \prod_i \pi(y_i | \eta_i(x), \theta) \quad \text{processus d'observation}$$

- $y$ : les observations
- $\theta$ : les hyperparamètres
- $\Sigma = Q^{-1}$ : la matrice de variance-covariance de l'effet aléatoire (suit une certaine fonction de variance-covariance - souvent de type Matérn).  $Q$  est la matrice de précision.
- $\eta(x) = Ax$  un processus gaussien avec  $A$  la matrice d'observation

La difficulté : estimer la structure de corrélation spatiale ( $\Sigma$  ou  $Q$ ).

# Formulation mathématique

$$\theta \sim \pi(\theta) \quad \text{hyperparamètres}$$

$$x|\theta \sim GF(0, \Sigma) \quad \text{champ gaussien latent}$$

$$y|x, \theta \sim \prod_i \pi(y_i | \eta_i(x), \theta) \quad \text{processus d'observation}$$

- $y$ : les observations
- $\theta$ : les hyperparamètres
- $\Sigma = Q^{-1}$ : la matrice de variance-covariance de l'effet aléatoire (suit une certaine fonction de variance-covariance - souvent de type Matérn).  $Q$  est la matrice de précision.
- $\eta(x) = Ax$  un processus gaussien avec  $A$  la matrice d'observation

**La difficulté : estimer la structure de corrélation spatiale ( $\Sigma$  ou  $Q$ ).**

# 1er approximation : Approche SPDE

- Principe de l'approche SPDE (Lindgren, Rue and Lindström, 2011) :
  - 1 champ gaussien de covariance une fonction de Matérn ...
  - ... est solution de l'EDPS ...

$$(\kappa^2 - \Delta)^{\alpha/2} x(s) = W(s), \quad s \in \mathbb{R}^d, \quad \alpha = \nu + d/2, \quad \kappa > 0, \quad \nu > 0$$

- ... et peut être représenté comme un champ Gauss-Markov (seulement pour certaines valeurs de  $\nu$ )
- Ce lien entre champ Gaussien et champ Gauss-Markov fournit une représentation creuse de l'effet spatial et simplifie les calculs.

Notations :  $\Delta$  le laplacien,  $W(s)$  un bruit blanc gaussien,  $\kappa$  le paramètre contrôlant la portée de l'effet aléatoire,  $\nu$  et  $\alpha$  les paramètres de lissage,  $d$  le nombre de dimension (2).

Pour des valeurs données de  $\nu$ , les champs Gauss-Markov génèrent des solutions approchées de l'EDPS. Les matrices de précisions de ces champs Gauss-Markov peuvent être utilisées pour formuler les matrices de précisions des champs gaussiens. Par exemple :

- pour  $\nu = 1$ , la matrice de précision s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ -2a & 2 & \\ 4 + a^2 & -2a & 1 \end{pmatrix}$$

- pour  $\nu = 2$  :

$$\begin{pmatrix} -1 & & & & \\ 3a & & -3 & & \\ -3(a^2 + 3) & & 6a & & -3 \\ a(a^2 + 12) & -3(a^2 + 3) & 3a & & -1 \end{pmatrix}$$

- La matrice est de moins en moins creuse ; l'effet aléatoire en un point dépend d'un voisinage plus étendu.



Pour des valeurs données de  $\nu$ , les champs Gauss-Markov génèrent des solutions approchées de l'EDPS. Les matrices de précisions de ces champs Gauss-Markov peuvent être utilisées pour formuler les matrices de précisions des champs gaussiens. Par exemple :

- pour  $\nu = 1$ , la matrice de précision s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ -2a & 2 & \\ 4 + a^2 & -2a & 1 \end{pmatrix}$$

- pour  $\nu = 2$  :

$$\begin{pmatrix} -1 & & & & \\ 3a & -3 & & & \\ -3(a^2 + 3) & 6a & -3 & & \\ a(a^2 + 12) & -3(a^2 + 3) & 3a & -1 & \end{pmatrix}$$

- La matrice est de moins en moins creuse ; l'effet aléatoire en un point dépend d'un voisinage plus étendu.

Pour des valeurs données de  $\nu$ , les champs Gauss-Markov génèrent des solutions approchées de l'EDPS. Les matrices de précisions de ces champs Gauss-Markov peuvent être utilisées pour formuler les matrices de précisions des champs gaussiens. Par exemple :

- pour  $\nu = 1$ , la matrice de précision s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ -2a & 2 & \\ 4 + a^2 & -2a & 1 \end{pmatrix}$$

- pour  $\nu = 2$  :

$$\begin{pmatrix} -1 & & & & \\ 3a & & -3 & & \\ -3(a^2 + 3) & & 6a & & -3 \\ a(a^2 + 12) & -3(a^2 + 3) & 3a & & -1 \end{pmatrix}$$

- La matrice est de moins en moins creuse ; l'effet aléatoire en un point dépend d'un voisinage plus étendu.

Pour des valeurs données de  $\nu$ , les champs Gauss-Markov génèrent des solutions approchées de l'EDPS. Les matrices de précisions de ces champs Gauss-Markov peuvent être utilisées pour formuler les matrices de précisions des champs gaussiens. Par exemple :

- pour  $\nu = 1$ , la matrice de précision s'écrit :

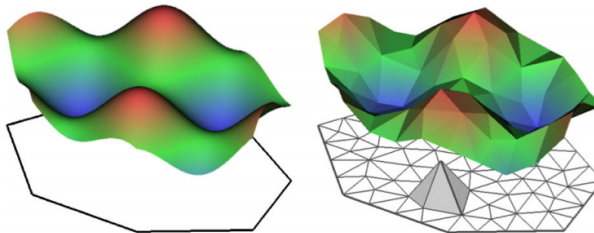
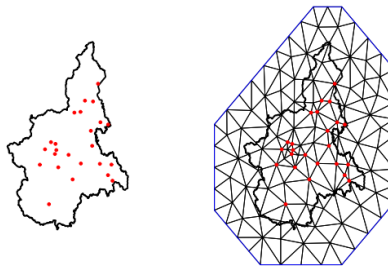
$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ -2a & 2 & \\ 4 + a^2 & -2a & 1 \end{pmatrix}$$

- pour  $\nu = 2$  :

$$\begin{pmatrix} -1 & & & & \\ 3a & & -3 & & \\ -3(a^2 + 3) & & 6a & & -3 \\ a(a^2 + 12) & -3(a^2 + 3) & 3a & & -1 \end{pmatrix}$$

- La matrice est de moins en moins creuse ; l'effet aléatoire en un point dépend d'un voisinage plus étendu.

**Fig. 2** *Left panel:* locations of the 24 monitoring stations in Piemonte region. *Right panel:* triangulation of Piemonte region using 123 vertices



**Fig. 3** *Left panel:* example of a spatial random field (*left*) given by  $X(s) = \cos(s_1) + \sin(s_2)$ , where  $s = \{s_1, s_2\}$ . *Right panel:* corresponding finite element representation of the spatial random field  $X(s)$  according to Eq. (9)

## 2e approximation : INLA

La probabilité conjointe du champ latent et des hyperparamètres s'écrit :

$$\pi(x, \theta | y) \propto \pi(\theta) \pi(x | \theta) \pi(y | x, \theta) \propto \pi(\theta) \pi(x | \theta) \prod_{i \in \mathcal{I}} \pi(y_i | x_i, \theta)$$

avec  $\theta$  : les paramètres,  $x$  : le champ latent,  $y$  : les observations

→ Long à estimer (via des méthodes type MCMC)

La méthode INLA consiste à approximer les distributions marginales

$\pi(\theta | y)$  et  $\pi(x_i | \theta, y)$  :

- $\tilde{\pi}(x_i | y) = \int \tilde{\pi}(x_i | \theta, y) \tilde{\pi}(\theta | y) d\theta$
- $\tilde{\pi}(\theta_j | y) = \int \tilde{\pi}(\theta | y) d\theta_{-j}$

## 2e approximation : INLA

La probabilité conjointe du champ latent et des hyperparamètres s'écrit :

$$\pi(x, \theta | y) \propto \pi(\theta) \pi(x | \theta) \pi(y | x, \theta) \propto \pi(\theta) \pi(x | \theta) \prod_{i \in \mathcal{I}} \pi(y_i | x_i, \theta)$$

avec  $\theta$  : les paramètres,  $x$  : le champ latent,  $y$  : les observations

**→ Long à estimer (via des méthodes type MCMC)**

La méthode INLA consiste à approximer les distributions marginales

$\pi(\theta | y)$  et  $\pi(x_i | \theta, y)$  :

- $\tilde{\pi}(x_i | y) = \int \tilde{\pi}(x_i | \theta, y) \tilde{\pi}(\theta | y) d\theta$
- $\tilde{\pi}(\theta_j | y) = \int \tilde{\pi}(\theta | y) d\theta_{-j}$

## 2e approximation : INLA

La probabilité conjointe du champ latent et des hyperparamètres s'écrit :

$$\pi(x, \theta | y) \propto \pi(\theta) \pi(x | \theta) \pi(y | x, \theta) \propto \pi(\theta) \pi(x | \theta) \prod_{i \in \mathcal{I}} \pi(y_i | x_i, \theta)$$

avec  $\theta$  : les paramètres,  $x$  : le champ latent,  $y$  : les observations

→ **Long à estimer (via des méthodes type MCMC)**

La méthode INLA consiste à approximer les distributions marginales

$\pi(\theta | y)$  et  $\pi(x_i | \theta, y)$  :

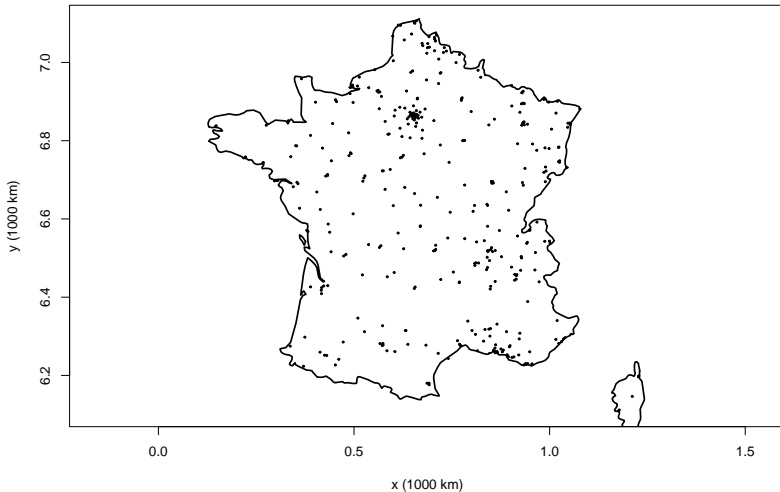
- $\tilde{\pi}(x_i | y) = \int \tilde{\pi}(x_i | \theta, y) \tilde{\pi}(\theta | y) d\theta$
- $\tilde{\pi}(\theta_j | y) = \int \tilde{\pi}(\theta | y) d\theta_{-j}$

# Bilan

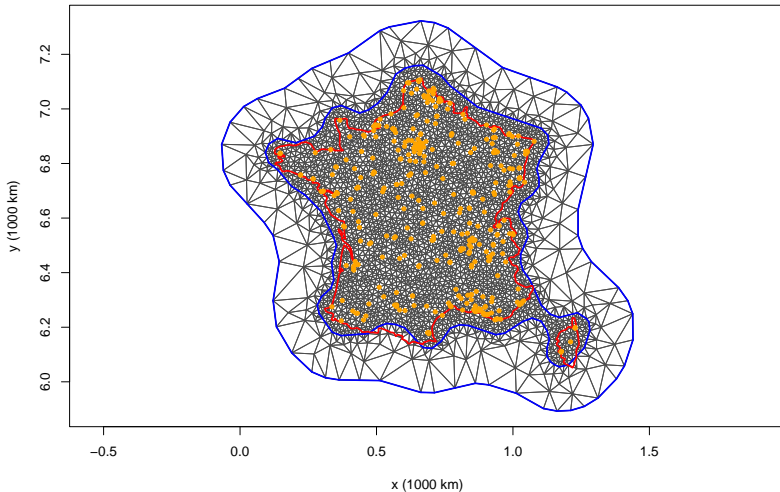
- INLA : Estimation des lois marginales des effets aléatoires et des hyperparamètres par des approximations de Laplace emboîtées
- Approche SPDE (1er résultats) : Approximation d'un champ gaussien par un champ Gauss-Markov
  - Valide pour des champs latents gaussiens
- Approche SPDE (2e résultats) : Interpolation linéaire pour relier le champ gaussien (définie sur une maille discrète) aux observations (définies sur un domaine continu)
  - Attention à la construction de la maille



# Données



# Création de la mesh



# Construction de l'objet SPDE

```
myspde=inla.spde2.pcmatern(mesh=mesh,  
                             alpha=2,  
                             prior.range=c(.01,.1),  
                             prior.sigma=c(25,0.5))  
  
# Matrice d'observation pour faire le lien  
# entre les noeuds de la mesh et les points d'observation  
A=inla.spde.make.A(mesh,loc=xy_OBS)  
  
# Vecteur des indices pour les noeuds de la mesh  
idx.spatial=inla.spde.make.index("spatial",  
                                   n.spde=mesh$n)
```

# Construction du modèle de régression

Premièrement, on construit un dataframe de covariable.

```
covar.df=data.frame(intercept=1,
                    x=xy_OBS[,1],
                    y=xy_OBS[,2])

# Creation du stack pour les données et les indices
mystack=inla.stack(data=list(pm10=OBS_daily2014$PM10),
                  A=list(A,1),
                  effects=list(idx.spatial,covar.df))

# Ecriture des formules du modèle
myformula=pm10~-1+intercept+f(spatial,model=mypde)
```

N.b.: comme on écrit l'intercept de façon explicite, on doit inclure "-1" dans l'expression du modèle.

# Ajustement du modèle avec R-INLA

```
fit=inla(myformula,  
        data=inla.stack.data(mystack),  
        family="gaussian",  
        control.predictor=list(A=inla.stack.A(mystack),  
                                compute=FALSE),  
        control.inla=list(int.strategy="eb",  
                           strategy="gaussian"),  
        verbose=FALSE)  
  
summary(fit)
```

## Ajustement du modèle avec R-INLA

```
## Registered S3 method overwritten by 'cli':
##   method      from
##   print.boxx spatstat.geom

##
## Call:
## c("inla(formula = myformula, family = \"gaussian\", data =
##   inla.stack.data(mystack), \"\", \" verbose = FALSE, control.predictor =
##   list(A = inla.stack.A(mystack), \"\", \" compute = TRUE, link = 1),
##   control.inla = list(int.strategy = \"eb\", \"\", \" strategy =
##   \"gaussian\"))")
## Time used:
##   Pre = 0.832, Running = 99.7, Post = 8.58, Total = 109
## Fixed effects:
##           mean    sd 0.025quant 0.5quant 0.975quant  mode kld
## intercept 18.058 0.324   17.423   18.058    18.694 18.058  0
##
## Random effects:
##   Name      Model
##   spatial SPDE2 model
##
## Model hyperparameters:
##
##           mean    sd 0.025quant 0.5quant
## Precision for the Gaussian observations 0.009 0.000    0.009    0.009
## Range for spatial                       0.021 0.005    0.012    0.021
## Stdev for spatial                       4.326 0.392    3.655    4.289
##
##           0.975quant  mode
## Precision for the Gaussian observations    0.009 0.009
## Range for spatial                       0.031 0.021
## Stdev for spatial                       5.190 4.192
##
## Expected number of effective parameters(stdev): 197.22(0.00)
## Number of equivalent replicates : 380.71
##
## Marginal log-Likelihood: -283189.30
## Posterior marginals for the linear predictor and
## the fitted values are computed
```

# Predictions avec R-INLA

Pour calculer les predictions, la donnée d'entrée (`inla.stack`) doit être un peu modifié. On ajoute des valeurs NA au vecteur d'observations et INLA prédit les valeurs du champ latent sur ces points.

```
# Construction de la grille de projection
proj_grid=inla.mesh.projector(mesh,
                               xlim=range(bound$loc[,1]),
                               ylim=range(bound$loc[,2]),
                               dims=c(100,100))

xygrid=as.matrix(expand.grid(proj_grid$x,proj_grid$y))

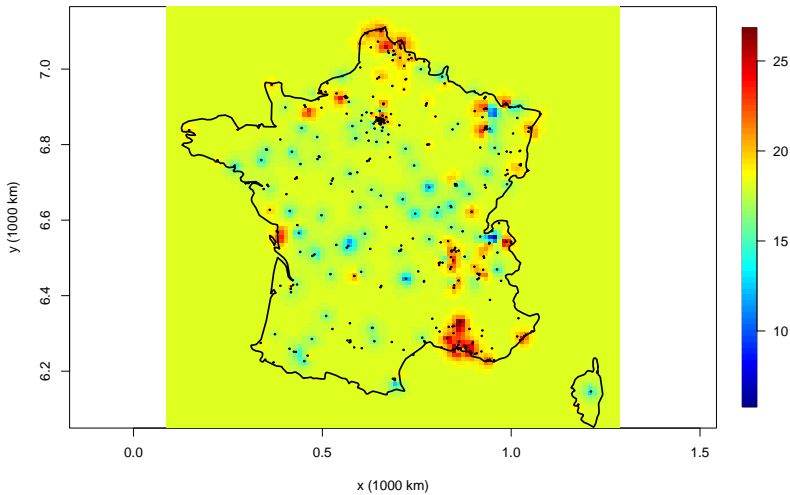
# Construction la matrice de projection
A=inla.spde.make.A(mesh,
                   loc=rbind(xygrid,xy_OBS))

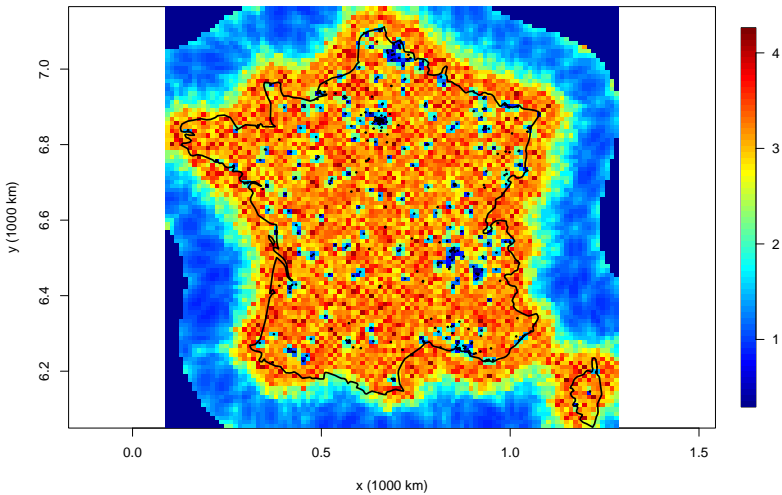
covar.df=data.frame(intercept=1,
                    x=c(xygrid[,1],
                        xy_OBS[,1]),
                    y=c(xygrid[,2],
                        xy_OBS[,2]))

# Creation du stack avec toutes les données et les indices: on ajoute des NA dans le vecteur d'observation
mystack=inla.stack(data=list(pm10=c(rep(NA,nrow(xygrid)),
                                     OBS_daily2014$PM10)),
                   A=list(A,1),
                   effects=list(idx.spatial,covar.df),
                   tag="mytag")
```

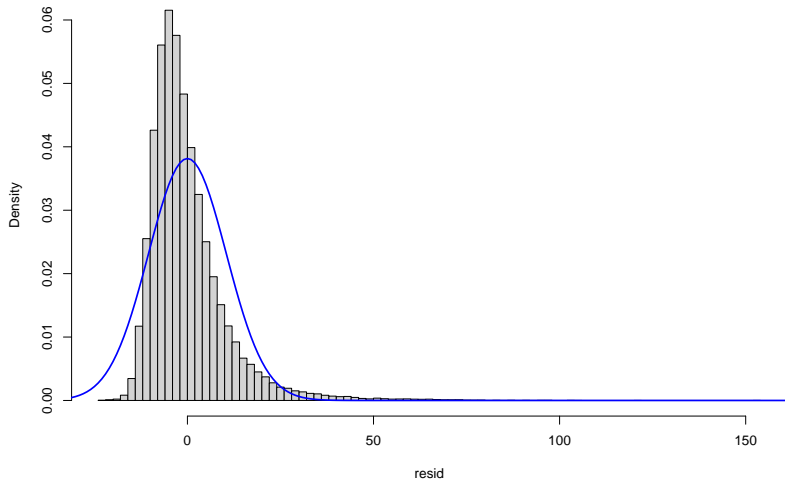








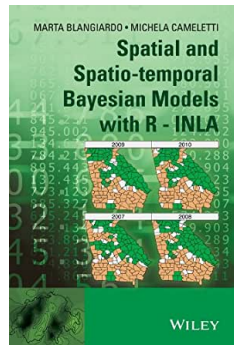
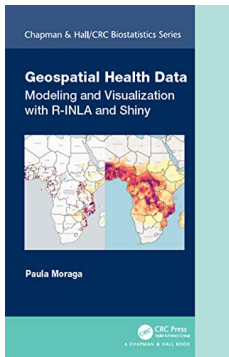
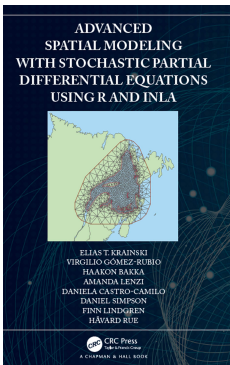
Histogram of resid



# Exercice ?

- Ajout de covariables au modèle (i.e. prédicteurs linéaires comme variable explicative)
- Evaluation/comparaison de modèles
- Passage à un modèle spatio-temporel
- Construction d'un modèle intégré (plusieurs sources de données)

# Quelques références utiles

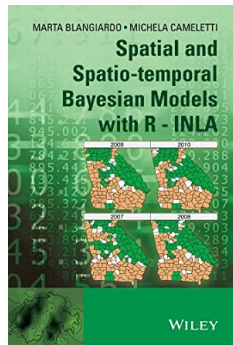
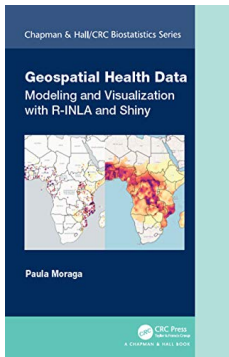
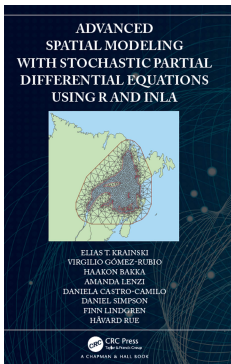


R-Inla peut paraître difficile à prendre en main (background mathématique, formatage de la donnée, construction de la matrice d'observation  $A$  et construction des cartes de prédiction)

→ Pas tant que ça...

→ Sinon le package Inlabru a pour but de rendre plus accessible l'outil d'inférence INLA

# Quelques références utiles

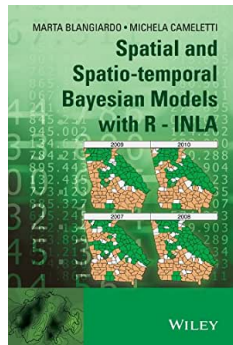
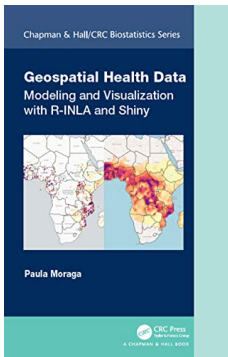
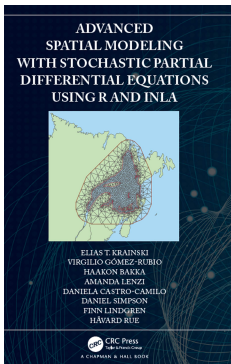


R-Inla peut paraître difficile à prendre en main (background mathématique, formatage de la donnée, construction de la matrice d'observation  $A$  et construction des cartes de prédiction)

→ Pas tant que ça...

→ Sinon le package `Inlabru` a pour but de rendre plus accessible l'outil d'inférence INLA

# Quelques références utiles



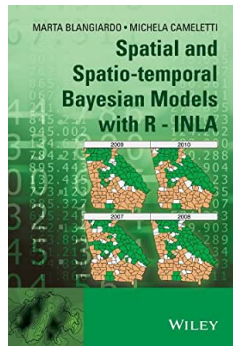
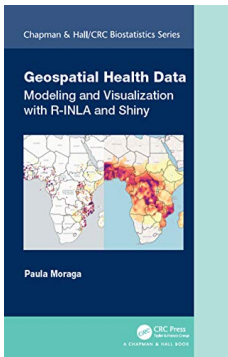
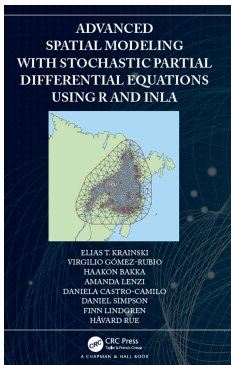
R-Inla peut paraître difficile à prendre en main (background mathématique, formatage de la donnée, construction de la matrice d'observation  $A$  et construction des cartes de prédiction)

→ Pas tant que ça...

→ Sinon le package `Inlabru` a pour but de rendre plus accessible l'outil d'inférence

INLA

# Quelques références utiles



R-Inla peut paraître difficile à prendre en main (background mathématique, formatage de la donnée, construction de la matrice d'observation  $A$  et construction des cartes de prédiction)

→ Pas tant que ça...

→ Sinon le package Inlabru a pour but de rendre plus accessible l'outil d'inférence INLA